**מרתון - הסתברות 2 - 18.11**

**אי - שוויונים**

משתמשים בשאלות בהן דורשים חסמים או גבול ולא הסתברות מדוייקת.

1. מרקוב: אם מ"מ אי שלילי, אז: .
2. צ'בישב: אם מ"מ עם תוחלת ושונות סופיים, אז: .
3. צ'רנוף: אם מ"מ ב"ת המחזירים ערכים בטווח וגם אז:

* לכל מתקיים: .  
  לכל מתקיים: .  
  לכל מתקיים: .
* לכל מתקיים: .

לכל מתקיים: .

1. צ'רנוף הופדינג: אם מ"מ ב"ת כך ש: וגם אז:   
   לכל מתקיים: .  
   לכל מתקיים: .

תרגיל:

מטילים קוביה הוגנת פעמים כאשר כל הפעמים הם ב"ת. יהא מ"מ הסופר את כמות הפעמים שיצא 6. יהא ההסתברות ש . חשבו את החסם על לפי מרקוב, צ'בישב וצ'רנוף.

פתרון:

נגדיר: - אינדיקטור האם יצא 6 בהטלה ה . מכאן: .

התוחלת של היא: .

ולכן מליניאריות התוחלת: .

לפי מרקוב: X אי שלילי (סופר כמות), .

.

לפי צ'בישב:

השונות של היא: .

ולכן השונות של היא: כי כל ההטלות ב"ת.

כעת:

לפי צ'רנוף:

נשתמש בחסם הראשון של צ'רנוף: .

חישוב צד: ומכאן: .

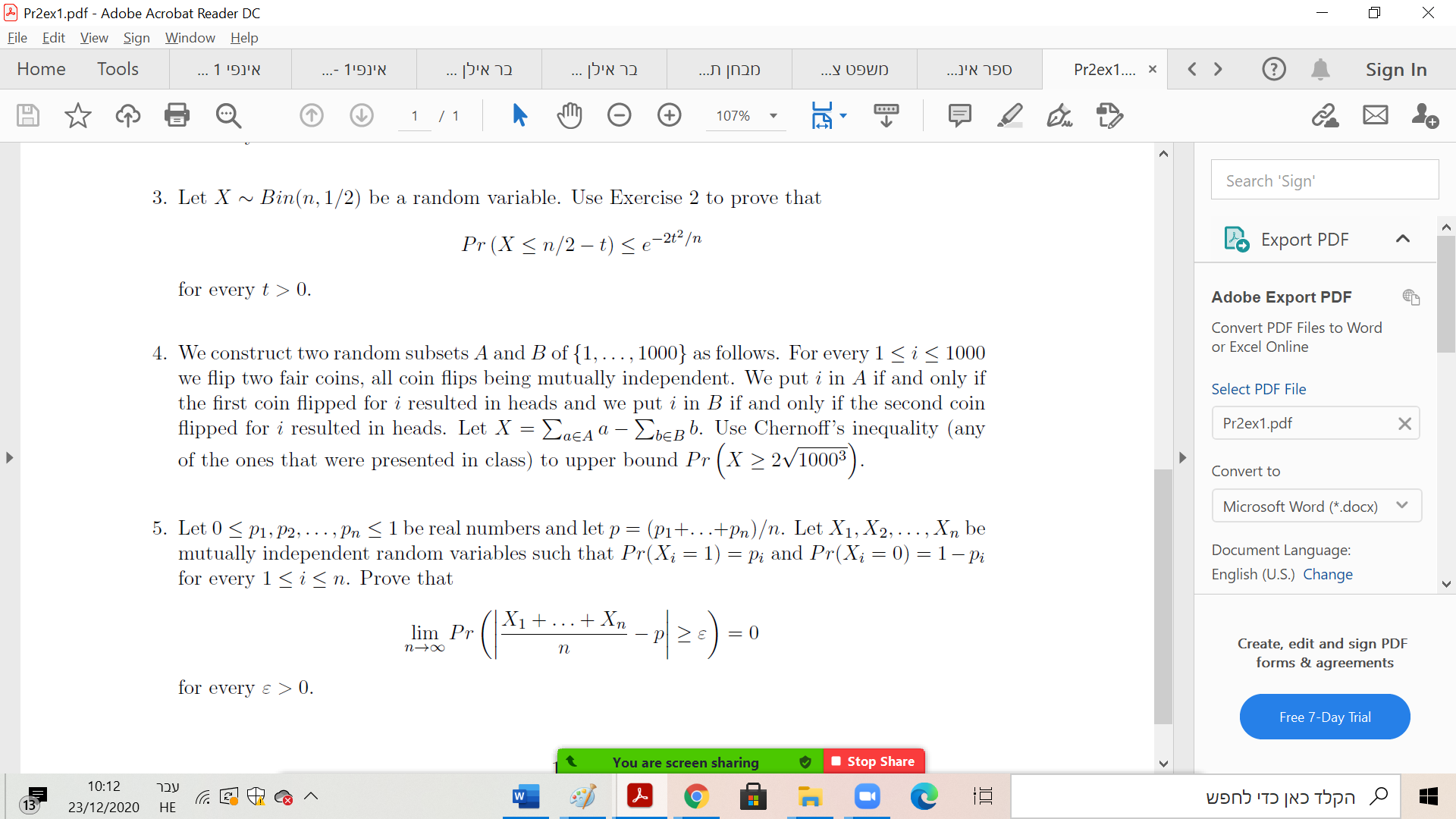
מכאן: .

נשתמש בחסם השני של צ'רנוף: .

חישוב צד: ומכאן: ומכאן: .

מכאן: .

תרגיל:



פתרון:

נגדיר: =

אם .

אם .

0 אחרת (שייך ל 2 הקבוצות או לא שייך ל 2 הקבוצות)

מכאן: .

ומכאן: . .

הטווח של המשתנים הוא: .

כעת "ננרמל": נגדיר: ומכאן הטווח ש הוא .  
נגדיר: .

מכאן:

נבודד: ולכן: .

לפני צ'רנוף, נחשב את ונקבל:

.

מכאן: נשתמש בחסם הראשון של צ'רנוף:

**משפטי גבול**

1. החוק החלש של המספרים הגדולים:  
   נתונה סדרה של מ"מ כאשר כולם ב"ת אחד בשני וכולם על אותו מרחב הסתברות ועם אותה תוחלת: . אזי לכל מתקיים: .

דוגמא: אם מטילים קוביה פעם אחת נקבל בממוצע .

אם נטיל קוביה 1000 פעמים נצפה שהסכום יהיה קרוב ל .

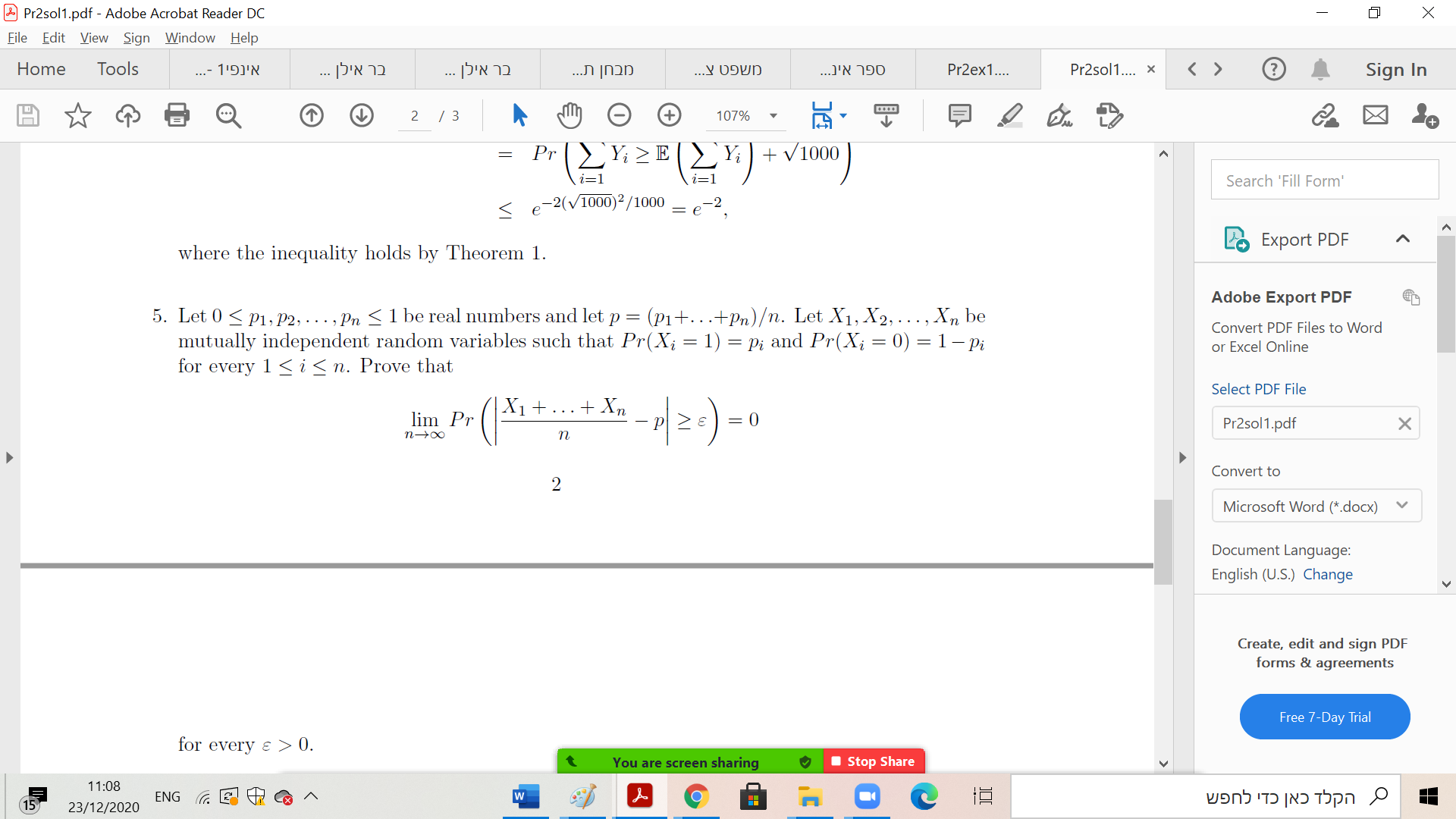
ככל שנטיל יותר, נצפה שהסכום ייתקרב יותר ויותר ל 3.5 כפול מספר ההטלות.

1. החוק החזק של המספרים הגדולים:  
   נתונה סדרה של מ"מ כאשר כולם ב"ת אחד בשני וכולם על אותו מרחב הסתברות ועם אותה תוחלת: ושונות סופית. אזי לכל מתקיים: .

הכללות:

1. התכנסות בהסתברות: סדרה של מ"מ מתכנסת למ"מ . אם לכל מתקיים: .
2. התכנסות כמעט בוודאות: סדרה של מ"מ מתכנסת כמעט בוודאות (a.a.s) למ"מ אם:  
   .

תרגיל:



פתרון:

נגדיר: .

מכאן: .

נשתמש באי שוויון צ'בישב:

נמצא את השונות של ונקבל: . כי ב"ת אחד בשני.

מכאן:

.

ולכן: .

**השיטה ההסתברותית**

נתונה לנו בעיה מורכבת בקומבינטוריקה - הוכחת קיום או אי קיום של משהו.

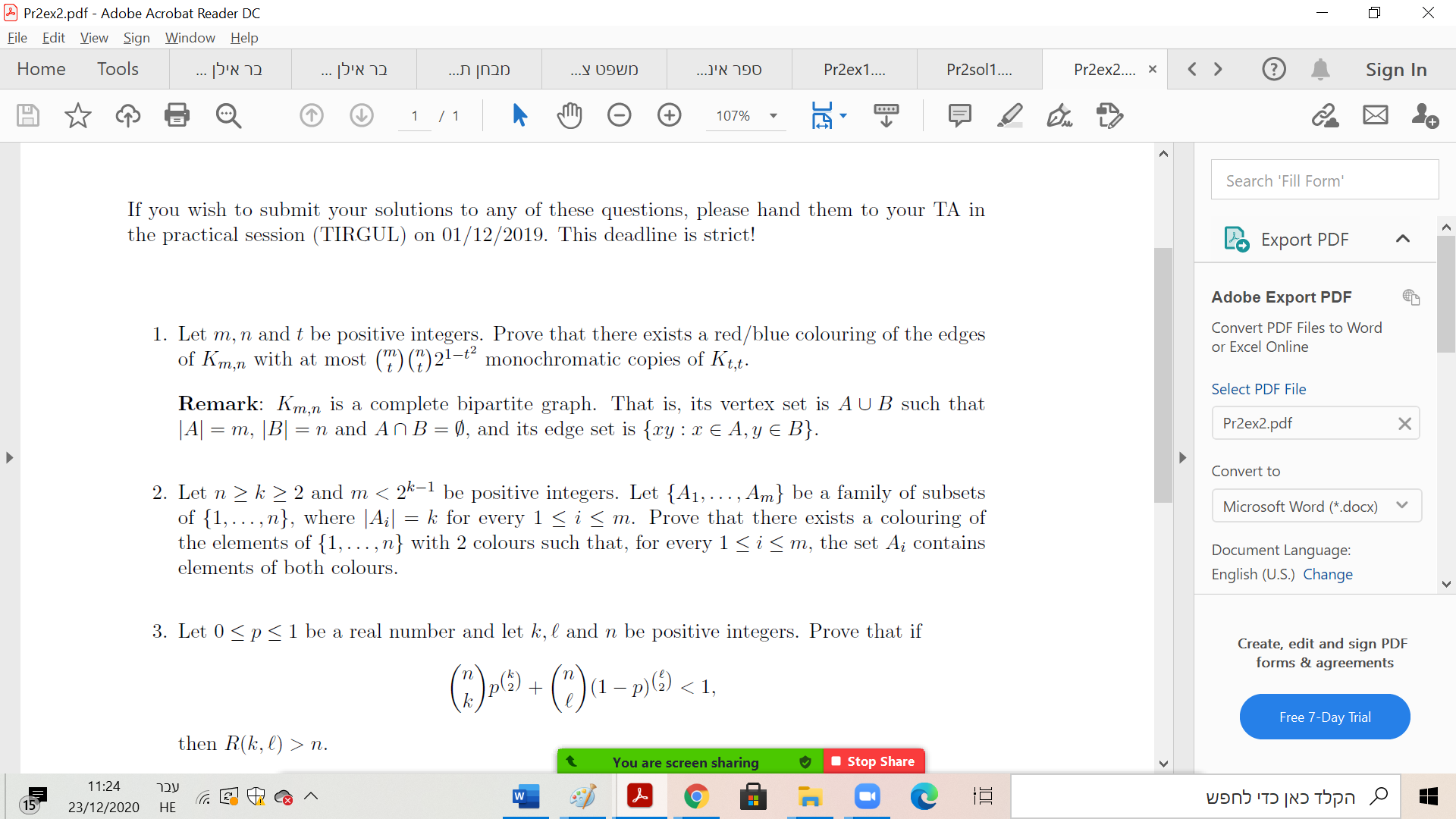
ניתן להשתמש בהסתברות כדי להוכיח את הקיום או האי קיום.

נשתמש בהסתברות שבונה מקרה אקראי.

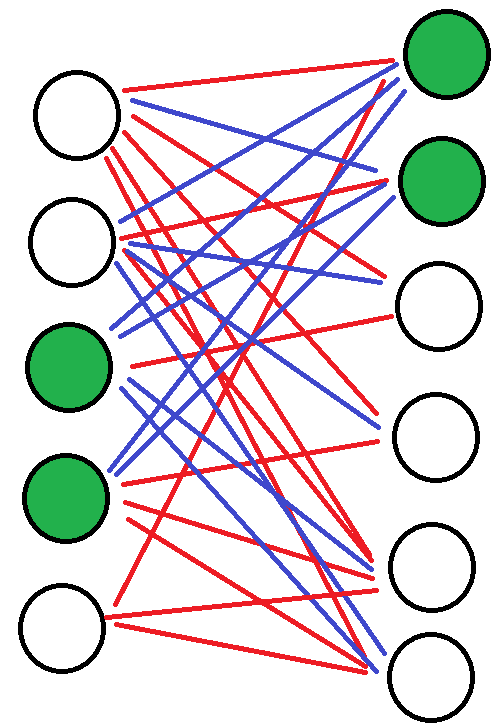
אם נראה שההסתברות למקרה היא 0 - זה יוכיח שבהכרח מקרה זה לא קיים.

אם נראה שההסתברות גדולה ממש מ 0 - זה יוכיח שבהכרח מקרה זה קיים.

תרגיל:



המחשה:



פתרון:

נשתמש בשיטה ההסתברותית - נצבע את צלעות הגרף באופן אקראי (סיכוי שווה לאדום ולכחול) ואז נראה שההסתברות שמספר ההעתקים של המונוכרומטיים הוא לכל היותר היא גדולה מ 0.

לכל A - קבוצה של קודקודים מתוך ה בצד הראשון ולכל - קבוצה של קודקודים מתוך ה בצד השני נגדיר אינדיקטור: = האם תת הגרף הבנוי מהקבוצות הוא מונוכרומטי.

נגדיר: .

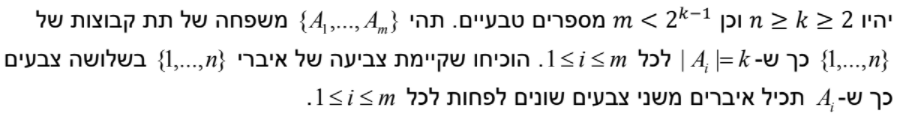
מכאן: כי נבחר צבע (2 אפשרויות) ואז נדרוש שההסתברות לכל אחת מ הצלעות המחברות בין ה t בצד האחד ל t בצד השני להיות אותו צבע שבחרנו שהיא הסתברות .

מכאן: כי יש אפשרויות לבחירת t הקודקודים מתוך הקבוצה האחת ויש אפשרויות לבחירת t הקודקודים מתוך הקבוצה האחרת.

מכאן:

ולכן קיימת צביעה כזו.

**תרגיל ממבחן 2019 שאלה 3**



המחשה:

אדום: 1,2

כחול: 3,4

ירוק: 5,6

פתרון:

נצבע אקראית את המספרים 1 עד n ב 3 צבעים בהסתברות אחידה: סיכוי לכל צבע (אדום, כחול, ירוק)

נגדיר = אינדיקטור ש באותו צבע. .

כלומר: X סופר כמה לא מקיימים את התנאי. אנו רוצים ש: .

נחשב תוחלת: .

מכאן: